УДК 517.9

АЛГОРИТМ ТРЕХМЕРНОГО ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ НА ТЕЛАХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Лосев Д.К., Самохин А.Б.

МИРЭА - Российский технологический университет, 119454, Россия, г. Москва, проспект Вернадского, 78, e-mail: losev.megapolys@yandex.ru, absamokhin@ya.ru

В данной статье описывается алгоритм построения программного обеспечения численного трехмерного интегрирования по телам сложной формы. Рассматриваются три способа описания тела сложной формы: в полярных, сферических и декартовых системах координат. Подробно разбираются нюансы и сложности каждого алгоритма. Рассматривается нахождение значения многомерного интеграла по поверхности после разбиения тела на симплексы. Формула Остроградского - Гаусса.

Ключевые слова: численное интегрирование, тела сложной формы, симплекс, триангуляция, система координат, программное обеспечение.

ALGORITHM FOR THREE-DIMENSIONAL NUMERICAL INTEGRATION OF COMPLEX-SHAPED BODIES

Losev D. K., Samokhin A. B.

MIREA - Russian Technological University, 119454, Moscow, 78 Vernadskogo Avenue, Russia, e-mail: losev.megapolys@yandex.ru, absamokhin@ya.ru

This article describes an algorithm for constructing software for numerical three-dimensional integration over complex-shaped bodies. Three ways of describing a complex-shaped body are considered: in polar, spherical, and Cartesian coordinate systems. The nuances and complexities of each algorithm are analyzed in detail. We consider finding the value of the multidimensional integral over the surface after dividing the body into simplices. The Ostrogradsky - Gauss formula.

Keywords: numerical integration, complex shape bodies, simplex, triangulation, coordinate system, software.

Введение

Численное интегрирование - вычисление значения определённого интеграла (как правило, приближённое). Под численным интегрированием понимают набор численных методов для нахождения значения определённого интеграла.

Численное интегрирование применяется в следующих случаях:

- Сама подынтегральная функция не задана аналитически. Например, она представлена в виде таблицы (массива) значений в узлах некоторой расчётной сетки.
- Аналитическое представление подынтегральной функции известно, но её первообразная не выражается через аналитические функции.

В этих двух случаях невозможно вычисление интеграла по формуле Ньютона — Лейбница. Также возможна ситуация, когда вид первообразной настолько сложен (например невыпуклое тело), что быстрее вычислить значение интеграла численным методом.

Вычисление интегралов по многомерным областям, как правило, требует наличия большого объема памяти, т. к. является NP-полной задачей. Сама по себе задача численного поиска интеграла решена, но затраты мощностей и памяти очень высоки, к тому же алгоритмы работают не на всех видах тел и ни при всех видах задания тела. Если программа будет использоваться математиком или инженером для численного решения задачи, то проще всего задать тело в координатах (полярных, сферических, декартовых). Но уже для трехмерного пространства встает проблема задания тела в декартовых координатах. Если программа будет использоваться для решения прикладной задачи (например, в геодезии, картографии или естественных науках), то проще вводить данный в формате, который можно считать с трехмерного графического редактора.

В данной области проведено много исследований. Например, в работе Д.Я. Рахматтулина 2006 года основной акцент сделан на многомерных интегралах с увеличением размерности, что представляет большой научный интерес, но менее применимо на практике и требует компьютеров с большой мощностью и возможностью одновременной работы большого количества параллельных потоков. Важные математические вопросы обсуждаются в книгах Сергея Борисовича Гашкова. Но у него сделан акцент на двумерный случай, а так же, на возможности различных разбиений тела, работы в различных метриках, и увеличение точности вычислений.

1. Интеграл по телу, заданному в сферических координатах

1.2. Постановка задачи

Найти тройной интеграл кусочно-гладкой функции f(x,y,z), по телу T, заданному формулой в сферических координатах. Значение следует искать численно, а не функционально, с наибольшей возможной точностью.

1.3. Ограничения на тело

Данная формулировка дает серьезные ограничения на тело, которое можно рассматривать. Например, невыпуклые тела. Зато, в отличие от других форм задания, здесь можно рассмотреть криволинейные поверхности, такие, как тела вращения, поверхности второго порядка и n-ой степени.

1.4. Алгоритм для разработки программного обеспечения

1. Нахождение точки, принадлежащей телу с наибольшей абсциссой
2. Нахождение точки, принадлежащей телу с наибольшей ординатой
3. Нахождение точки, принадлежащей телу с наибольшей аппликатой
4. Нахождение точки, принадлежащей телу с наименьшей абсциссой
5. Нахождение точки, принадлежащей телу с наименьшей ординатой
6. Нахождение точки, принадлежащей телу с наименьшей аппликатой
7. Создание куба, натянутого на данные 6 точек
8. Триангуляция (разбиение на симплексы) данного куба
9. Нахождение оптимального шага разбиения и метода разбиения
10. Нахождение центра масс каждого симплекса
11. Определение принадлежности центра масс симплекса заданному телу
12. Отсечение симплексов, чьи центры масс не принадлежат телу
13. Вычисление интеграла
    1. Вычисление значения функции в центре масс i-того симплекса
    2. Умножение объема i-го симплекса на значение функции
    3. Суммирование
14. Обработка исключений
    1. Тела нулевого объема
    2. Точки на границах симплексов
    3. Центры масс на границах тела
    4. Центр масс вне симплекса

В данной программе необходимо реализовать следующие функции:

- Перевод из сферических координат в декартовы
- Построение куба
- Триангуляция куба
- Поиск интеграла
- Поиск объема тела
- Решение системы линейных уравнений
- Принадлежность точки телу
- Поиск центра масс

Многие из этих функций могут использоваться для реализации иных алгоритмов, описываемых далее.

2. Интеграл по телу, заданному семейством плоскостей

2.1. Постановка задачи

Найти тройной интеграл кусочно-гладкой функции f(x,y,z), по телу T, заданному семейством плоскостей:

Значение следует искать численно, а не функционально, с наибольшей возможной точностью. В первую очередь, следует разобраться, что значит задать тело семейством плоскостей, и какое тело может получиться в итоге.

Каждая плоскость задает не только плоскость, но и ту часть пространства, которую относительно нее следует взять. Фактически, это полупространство, заданное неравенством $Ax+By+Cz+D>0$. Понятно, что заданное тело будет являться пересечением семейства полупространств, а это, по теореме линейной алгебры, выпуклый многогранник.

2.2. Ограничения на тело

Такая форма задания сильно ограничивает множество тел, с которым можно работать, но гораздо проще других по форме задания тела, при этом она сильно расширяет круг применения программы.

Таким способом можно задать лишь выпуклые многогранники. Зато они могут располагаться в любой части пространства. В наперед заданной системе координат нет необходимости менять систему, даже если многогранник располагается далеко от нее. Что сокращает вычислительную сложность.

2.3. Алгоритм для разработки программного обеспечения

1. Нахождение точки, принадлежащей телу с наибольшей абсциссой
2. Нахождение точки, принадлежащей телу с наибольшей ординатой
3. Нахождение точки, принадлежащей телу с наибольшей аппликатой
4. Нахождение точки, принадлежащей телу с наименьшей абсциссой
5. Нахождение точки, принадлежащей телу с наименьшей ординатой
6. Нахождение точки, принадлежащей телу с наименьшей аппликатой
7. Создание куба, натянутого на данные 6 точек
8. Триангуляция (разбиение на симплексы) данного куба
9. Нахождение оптимального шага разбиения и метода разбиения
10. Нахождение центра масс каждого симплекса
11. Определение принадлежности центра масс симплекса заданному телу
12. Отсечение симплексов, чьи центры масс не принадлежат телу
13. Вычисление интеграла
    1. Вычисление значения функции в центре масс i-того симплекса
    2. Умножение объема i-го симплекса на значение функции
    3. Суммирование
14. Обработка исключений

Несмотря на то, что алгоритм работы очень похож на алгоритм из первой главы, существует ряд дополнительных проблем. Одним из проблемных мест является алгоритм поиска «крайних» точек, на которые будет «натягиваться» куб. Рассмотрим данный алгоритм отдельно. Сложность алгоритма: O(n^4).

1. Поиск пересечений граничных плоскостей по 3 в одной точке.
2. Проверка точек пересечения подстановкой их в остальные неравенства
3. Отбор вершин многогранника
4. Сортировка вершин по порядку возрастания абсцисс (поиск min и max)
5. Сортировка вершин по порядку возрастания ординат (поиск min и max)
6. Сортировка вершин по порядку возрастания аппликат (поиск min и max)

Так же в этой задаче требуется обработка очень большого количества исключений. Например, семейство полупространств может пересекаться по пустому множеству, или по неограниченной области. Некоторые из данных проверок легко включить в алгоритм, представленный выше. Проверка же некоторых по сложности превышает его, поэтому их включение нецелесообразно.

В данной программе необходимо реализовать следующие дополнительные функции:

- Поиск пересечения плоскостей
- Расстояние от точки до плоскости
- Расстояние между плоскостями
- Точка пересечения трех плоскостей
- Вектор нормали к плоскости

3. Интеграл по телу, заданному как трехмерный граф

3.1. Постановка задачи

Найти тройной интеграл кусочно-гладкой функции f(x,y,z), по телу T, заданному вершинами и ребрами:

Значение следует искать численно, а не функционально, с наибольшей возможной точностью. Тело следует задавать набором точек и набором пар точек (двумерным массивом). Если пара точек соединена ребром, то пара их номеров хранится в данном массиве. Такое задание объекта полностью соответствует определению трехмерного графа.

3.2. Ограничения на тело

В этом случае необходимо прописать исключения, позволяющие убедиться, что заданный объект действительно является телом. А именно: тело замкнуто, ограничено, не имеет самопересечений. В данном случае тело не обязательно является многогранником или выпуклым, но его можно описать как сумму многогранников.

3.3. Алгоритм для разработки программного обеспечения

1. Нахождение точки, принадлежащей телу с наибольшей абсциссой
2. Нахождение точки, принадлежащей телу с наибольшей ординатой
3. Нахождение точки, принадлежащей телу с наибольшей аппликатой
4. Нахождение точки, принадлежащей телу с наименьшей абсциссой
5. Нахождение точки, принадлежащей телу с наименьшей ординатой
6. Нахождение точки, принадлежащей телу с наименьшей аппликатой
7. Создание куба, натянутого на данные 6 точек
8. Триангуляция (разбиение на симплексы) данного куба
9. Нахождение оптимального шага разбиения и метода разбиения
10. Нахождение центра масс каждого симплекса
11. Определение принадлежности центра масс симплекса заданному телу
12. Отсечение симплексов, чьи центры масс не принадлежат телу
13. Вычисление интеграла
    1. Вычисление значения функции в центре масс i-того симплекса
    2. Умножение объема i-го симплекса на
    3. Суммирование
14. Обработка исключений
    1. Тела нулевого объема
    2. Точки на границах симплексов
    3. Центры масс на границах тела

3.4. Особенности разбиения на симплексы при численном подсчете

Отдельно встает задача о проверке вхождения центра масс симплекса во внутреннюю часть тела. Таким образом мы проверяем (приближенно), входит ли симплекс в тело. При достаточно мелком разбиении мы считаем вхождение центра масс эквивалентным вхождению всего симплекса, что дает сравнительно малую погрешность.

Алгоритм решения данной проблемы в данном способе задания:

1 этап. Так как известны min и max по x и y - необходимо брать точку, заведомо лежащую вне тела.

2 этап. Поиск прямой, соединяющей исследуемую точку и точку вне тела.

3 этап. Поиск точки пересечения данной прямой с гранями тела (двумерный аналог решаемой задачи, реализуемый отдельной функцией)

4 этап. Определение тех точек пересечения, которые лежат на отрезке между этими точками.

5 этап. По четности определить, лежит ли данная точка в той же части пространства, что и внешняя, или нет.

(Если да - то точка принадлежит телу)

6 этап. Отдельно следует рассмотреть случаи частичного совпадения данной прямой с ребром или гранью. Отдельно следует рассмотреть случай прохождения данной прямой через вершину многогранника.

4. Математические основы исследования

В данной работе наибольшую сложность представляют два теоретических объекта.

1. Решение задачи по определению принадлежности точки телу (многограннику) или объекту(многоугольнику), заданному математическим графом. А именно множеством точек и множеством отношений, которые показывают, какие точки соединены ребром.

2. Нахождение значения многомерного интеграла по поверхности после разбиения тела на симплексы. Формула Остроградского - Гаусса.

4.1. Алгоритм

1. Определить вспомогательную точку, которая точно лежит вне многогранника (имеет достаточно большие координаты).
2. Построить уравнение прямой, проходящей через эти две точки.
3. Для многоугольника построить множество прямых, составляющих стороны многоугольника
4. Заменить их на соответствующие отрезки.
5. Определить сколько точек пересечения имеет отрезок данной прямой со сторонами многоугольника.

6. При нечетном числе пересечений считать, что точка лежит в многоугольнике. При четном – считать, что не принадлежит.
7. Для многогранника рассматривать проекции на одну из базисных плоскостей.

4.2. Исключения

Случай 1. Совпадение прямой через вспомогательную точку и искомую точку частично с ребром.

Случай 2. Принадлежность данной прямой грани многогранника.

Случай 3. Вырождение данной прямой при проецировании.

Случай 4. Совпадение данной прямой с ребром частично при проецировании.

Случай 5. Попадание данной прямой на грань многогранника при проецировании.

Случай 6. Прохождение данной прямой через вершину или через внутреннюю точку ребра многогранника (не вносит изменений в код, но требовал математического обоснования.

4.3. Формула Остроградского - Гаусса и ее применение

В данной работе я рассматриваю только оболочки, ограничивающие односвязную область. Возможно, невыпуклую. В таком случае мы можем рассмотреть тройной интеграл от дивергенции векторной функции: $\iiint_V \nabla F(r)dV = \iiint_V (\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z})dV$, где оператор набла – оператор Гамильтона (то есть сумма частных производных).

Тогда можно рассматривать вместо него двойной интеграл по поверхности:

$$\iint_S m\,F(r)d\,S = \iiint_V \nabla F(r)d\,V$$

В тех случаях, когда мы рассматриваем многогранник, формула подразумевает суммирование по граням. В случае задания тела формулой (1 раз непрерывно дифференцируемая поверхность (C^1)) можно рассматривать как один интеграл. Данная формула может быть использована для перехода из левой части к правой. То есть для вычисления поверхностного интеграла считать интеграл по объему.

Заключение

В данной работе приведены несколько алгоритмов для построения программного обеспечения для решения задачи численного трехмерного интегрирования по телам сложной формы. Все вышеуказанные алгоритмы отличаются способом задания тела сложной формы. При этом только в методе «Интеграл по телу, заданному как трехмерный граф» можно работать с телом сложной формы, так как данный метод имеет самые мягкие ограничения и как следствие самый большой потенциал применения. Сложность вычислений алгоритмов будет напрямую зависеть от желаемой точности, то есть от размеров симплексов, но в перспективе исследования задачу численного интегрирования программно распараллелить, что позволит увеличить скорость и точность вычислений за счет увеличения вычислительной мощности.

Список литературы

1. В.А. Зорич. «Математический анализ»/ Зорич В.А. – Москва, Издательство МЦНМО, 2012 – 576 с.
2. К.Н. Гурьянова. «Математический анализ»/ Гурьянова К.Н., Алексеева У.А.,Бояршинов В.В – Екатеринбург, Издательство уральского университета, 2014 – 330 с.
3. А.Е. Умнов. «Аналитическая геометрия и линейная алгебра»/Умнов А.Е. – Москва, МФТИ, 2011 – 545 с.
4. А.А. Михалев «Начала алгебры»/Михалев А.А, Михалев А.В. – Москва, 2016 – 258 с.
5. И.Г. Ким «Численные методы»/ Ким И.Г., Латыпова Н.В., Моторина О.Л. – Ижевск, 2013 – 49 с.
6. Ильин В. А. и др. Математический анализ. Продолжение курса / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. Под ред. А. Н. Тихонова. — М.: Изд-во МГУ, 1987.— 358 с.
7. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение (пер. с англ.).. — Изд. второе, стереотип.. — М.: Мир, 2001. — 575 с.
8. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : Учеб. пособие для вузов: В 2 т. — 13-е изд.. — М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1985. — 432 с.
9. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. — М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. — 432 с.

References

1. V. A. Zorich. "Mathematical analysis»/ Zorich V. A.-Moscow, ICNMO Publishing House, 2012 – 576 p.
2. K. N. Guryanova. "Mathematical analysis" / Guryanova K. N., Alekseeva U. A., Boyarshinov V. V.-Yekaterinburg, Ural University Press, 2014 – 330 p.
3. A. E. Umnov. "Analytical geometry and linear algebra»/Umnov A. E.-Moscow, MIPT, 2011 – 545 p.
4. A. A. Mikhalev " The beginnings of algebra»/Mikhalev A. A., Mikhalev A.V.-Moscow, 2016 – 258 p.
5. I. G. Kim " Numerical methods»/ Kim I. G., Latypova N. V., Motorina O. L.-Izhevsk, 2013 – 49 p.
6. Ilyin V. A. et al. Mathematical analysis. Continuation of the course / V. A. Ilyin, V. A. Sadovnichy, Bl. X. Sendov. Edited by A. N. Tikhonov. - Moscow: Moscow State University Publishing House, 1987. - 358 p.
7. Kahaner D., Mowler K., Nash S. Numerical methods and software (trans. from English) .. - Ed. second, stereotype.. - Moscow: Mir, 2001 — - 575 p.
8. Piskunov N. S. Differential and integral calculus: Textbook for universities: In 2 vols. - 13th ed. - Moscow: Nauka. Phys.-mat. lit., 1985, 432 p.
9. Samarsky A. A., Gulin A.V. Numerical methods: Textbook for universities. - M.: Nauka. Phys.-mat. lit., 1989. — 432 p.