УДК 004.942 519.21

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К ОБЕСПЕЧЕНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ РАСПРЕДЕЛЁННЫХ СИСТЕМ РЕПЛИКАЦИИ

[2]Сухоплюев Д.И., [1,2]Назаров А.Н.

[1]Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, 119333, Российская Федерация, г.Москва, ул. Вавилова, 44, корп.2, e-mail: a.nazarov06@bk.ru

[2]Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «МИРЭА — Российский технологический университет», 119454, Российская Федерация, г. Москва, проспект Вернадского, 78, e-mail: sukhoplyuev.d.i@edu.mirea.ru

Целью исследования является разработка методов формального анализа устойчивости распределённых систем репликации данных в условиях изменчивой топологии сети и характеристик каналов связи. Работа направлена на преодоление ограничений традиционных подходов, недостаточно эффективных в условиях динамики современных информационных инфраструктур. В рамках исследования предложены стохастические модели, основанные на модели Эрдёша–Реньи для описания топологии и модели Гилберта–Эллиотта для каналов связи. Эти подходы позволили учитывать вероятностный характер соединений и флуктуации состояния каналов. Разработанные динамические уравнения описывают поведение системы, включая длину очередей, интенсивность потока данных и количество реплик. Ляпуновский анализ использован для определения равновесных состояний и их устойчивости. Экспериментальная верификация показала высокую точность модели при прогнозировании поведения системы. Метрики, такие как среднеквадратическая ошибка и доля объяснённой вариации, подтвердили адекватность предложенных уравнений. Модель демонстрирует устойчивость к изменениям параметров нагрузки и топологии, что подчёркивает её универсальность. Ключевые выводы включают возможность использования усреднённых характеристик для управления распределёнными системами в реальном времени. Предложенный подход обеспечивает минимизацию задержек, эффективное использование пропускной способности и стабильное функционирование системы даже в условиях высокой динамики. Практическая значимость работы заключается в применимости предложенных моделей для оптимизации существующих инфраструктур, включая Kubernetes-кластеры с использованием Cilium. Разработанные механизмы управления позволяют адаптироваться к изменяющимся условиям работы, что создаёт перспективы для проектирования масштабируемых и устойчивых распределённых систем передачи данных.

Ключевые слова: распределенные системы, репликация, стохастическое моделирование, топология сети, устойчивость систем.

STOCHASTIC APPROACHES TO ENSURING THE STABILITY OF DISTRIBUTED REPLICATION SYSTEMS

[1]Sukhoplyuev D.I., [2]Nazarov A.N.

[1]Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «MIREA – Russian Technological University», 119454, Russian Federation, Moscow, Vernadskogo Ave., 78, e-mail: sukhoplyuev.d.i@edu.mirea.ru

[2]Federal Research Center Computer Science and Control of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation, e-mail: a.nazarov06@bk.ru

The study aims to develop methods for formal analysis of the stability of distributed data replication systems under variable network topology and channel characteristics. The research addresses limitations of traditional approaches, which are insufficiently effective in the dynamic conditions of modern information infrastructures.

This work introduces stochastic models based on the Erdős–Rényi model for topology description and the Gilbert–Elliott model for communication channels. These approaches account for the probabilistic nature of connections and fluctuations in channel states. The proposed dynamic equations describe system behavior, including queue lengths, data flow intensity, and the number of replicas. Lyapunov analysis was employed to determine equilibrium states and their stability. Experimental verification demonstrated the high accuracy of the model in predicting system behavior. Metrics such as mean squared error and the explained variance ratio confirmed the adequacy of the proposed equations. The model exhibits robustness to changes in load parameters and topology, underscoring its universality. Key findings include the feasibility of utilizing averaged characteristics for real-time management of distributed systems. The proposed approach minimizes delays, ensures efficient utilization of bandwidth, and maintains stable system performance even under highly dynamic conditions. The practical significance of this work lies in the applicability of the proposed models for optimizing existing infrastructures, including Kubernetes clusters with Cilium integration. The developed management mechanisms enable adaptation to changing

operational conditions, paving the way for the design of scalable and resilient distributed data transmission systems.

Keywords: distributed systems, replication, stochastic modeling, network topology, system stability.

Введение

Надёжное и эффективное функционирование распределённых систем передачи данных играет ключевую роль в современных информационных инфраструктурах. По мере увеличения масштабов сетей, числа вовлечённых узлов и сложности коммуникационных топологий, становится всё более очевидной необходимость в методах, позволяющих формально анализировать, прогнозировать и управлять состоянием таких систем. Сложность возникает не только из-за динамического характера нагрузки, но и из-за стохастической природы каналов передачи данных, случайности топологий соединений между узлами, а также вероятностной структуры поступления и распространения обновлений [1-3].

Традиционные подходы к анализу распределённых систем репликации и согласования данных зачастую основаны на эмпирических или эвристических методологиях. Такие методы могут работать достаточно хорошо в сравнительно простых или статичных условиях, однако в условиях, где топология сети постоянно меняется, каналы связи периодически ухудшаются или улучшаются, а обновления поступают с нерегулярной интенсивностью, формальный и строгий анализ устойчивости и равновесных состояний становится критически важным. Без чётких математических гарантий трудно предсказывать поведение системы при росте нагрузки, обеспечить достаточный уровень качества обслуживания (QoS) или гарантировать отсутствие неконтролируемых задержек и перегрузок [4].

1. Математическое моделирование

В этой работе мы предлагаем подход, основанный на усреднении по распределению состояний сети и канала, с применением методов анализа устойчивости, чтобы получить целостную картину поведения системы в среднем. В качестве стохастических компонентов мы будем использовать обобщённую модель Эрдёша–Реньи для описания топологии сети [5] и модель Гилберта–Эллиотта для характеристик канала [6]. Модель Эрдёша–Реньи позволит нам рассмотреть сеть, состоящую из большого числа узлов, соединённых каналами с определённой вероятностью, что порождает сложную и динамичную топологию, существенно влияющую на задержки и пропускную способность между узлами. В свою очередь, модель Гилберта–Эллиотта позволит учесть вероятностный характер канала связи, его случайные переключения между «хорошим» и «плохим» состояниями, что будет отражаться на ожидаемых показателях пропускной способности и вероятности ошибки.

Объединяя эти два подхода к стохастическому моделированию, мы сформулируем параметризованную усреднённую модель распределённой системы. В этой модели каждый параметр — интенсивность потока обновлений, число реплик, целевая задержка, пропускная способность каналов — будет заменён на его математическое ожидание или подходящую функцию, учитывающую вероятностное поведение всей системы. Далее, мы применим методы теории динамических систем и ляпуновского анализа для вывода системы дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию очередей обновлений и числа реплик во времени [7]. Найдя равновесные точки и проанализировав их устойчивость, мы сможем определить условия, при которых система будет стабилизироваться на некотором уровне задержки и количестве реплик, а также выявить параметры, приводящие к резким качественным изменениям в поведении, таким как неограниченный рост очередей или скачкообразные изменения в числе реплик [8].

Предлагаемый подход будет полезен для проектирования и исследования распределённых систем, поскольку обеспечит возможность теоретической оценки эффективности механизмов репликации и согласования, а также сравнительного анализа различных стратегий управления. Изучая устойчивость в среднем, мы сможем понять, как система будет масштабироваться при увеличении числа узлов или интенсивности обновлений, как скажется на ней воссоединение или распад связей между узлами, и как на её поведение повлияют флуктуации состояния каналов. Таким образом, данный подход станет связующим звеном между фундаментальной теорией динамических систем и практическими задачами разработки эффективных, предсказуемых и устойчивых распределённых систем передачи данных.

1.1. Модель Эрдеша-Реньи

Рассмотрим распределенную систему из n узлов. Каждый потенциальный канал (ребро) между двумя узлами присутствует независимо с вероятностью p. В итоге мы получаем случайный граф $G(n, p)$.

– Для больших n и при $p > \frac{\ln n}{n}$ граф почти наверняка связен, и средняя длина пути между случайно выбранными узлами приблизительно равна некоторой функции $L(p,n)$ (например, для сверхкритических случайных графов $L(p,n)$ растет медленно, порядка $\frac{\ln n}{\ln(np)}$).

– При проектировании репликации предполагается, что обновления должны доставляться от «основной» копии к остальным $R(t)$ (уравнение 2) – 1 репликам. Средняя длина пути до каждого узла-реплики будет в среднем около $L(p,n)$.

1.2. Модель Гилберта-Эллиотта

Модель Гилберта-Эллиотта описывает канал как двусостоявный марковский процесс: «хорошее» состояние с высокой пропускной способностью B_{good} и низкой ошибочностью, и «плохое» состояние с пропускной способностью B_{bad} (меньшей). Стационарные вероятности состояний обозначим как q_{good} и $q_{bad} = 1 - q_{good}$. Тогда математическое ожидание пропускной способности одного канала (уравнение 1):

$$B_{eff,edge} = q_{good} B_{good} + (1 - q_{good}) B_{bad} \quad (1)$$

1.3. Скорость передачи обновлений

Пусть λ - интенсивность поступления обновлений (обновления/единицу времени), а S_u - средний размер одного обновления (например, в битах).

Чтобы доставить обновление в каждую реплику, нам нужно как минимум $R(t)$ - 1 поток распространения. Если каждый путь имеет в среднем длину $L(p,n)$ рёбер, а каждое ребро в среднем даёт пропускную способность $B_{eff,edge}$ (уравнение 1), то можно оценить эффективную пропускную способность доставки обновлений к одной реплике как примерно $\frac{B_{eff,edge}}{L(p,n)}$.

Для $R(t)$ реплик нам нужно отправить обновления в $R(t)$ - 1 узлов (кроме основного). Предполагая идеальный случай, когда пропускная способность масштабируется линейно (или у нас достаточно ресурсов), мы имеем уравнение 3:

$$B_{eff}(R) = (R-1)\frac{B_{eff,edge}}{L(p,n)} \quad (2)$$

Однако на практике может быть верхняя граница B - общая доступная пропускная способность исходного узла (или лимит исходящего канала). Тогда уравнение (3):

$$B_{eff}(R) = \min\{B, (R-1)\frac{B_{eff,edge}}{L(p,n)}\} \quad (3)$$

Это усреднённая модель: мы подставили ожидания по каналам (через Гилберта-Эллиотта) и по топологии (через $L(p,n)$).

1.4. Динамическая модель

Пусть $W(t)$ - длина очереди необработанных обновлений, ожидающих рассылки, а $R(t)$ - число реплик. Тогда динамика может быть описана уравнениями (4-6).

$$\frac{dW(t)}{dt} = \lambda - \frac{B_{eff}(R(t))}{S_u} \quad (4)$$

$$D(t) \approx \frac{W(t)}{\lambda} \quad (5)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = k(\frac{W(t)}{\lambda} - D_{target}) \quad (6)$$

Уравнение (4) описывает изменение длины очереди, где λ - входной поток обновлений, а $\frac{B_{eff}(R(t))}{S_u}$ -

эффективная «выработка» (применение обновлений), зависящая от числа реплик и параметров сети.

Уравнение (5) отображает управление числом реплик, в котором мы предполагаем, что мы хотим поддерживать некоторую целевую задержку D_{target} согласно закону Литтла [9] при стационарности. Отсюда мы можем задать простое управляющее уравнение для $R(t)$, стремясь к поддержанию задержки – уравнение (6), в котором k - коэффициент чувствительности.

1.5. Нахождения равновесия

В равновесии $\frac{dW}{dt} = 0$ и $\frac{dR}{dt} = 0$ отсюда получаем, что для $\frac{dW}{dt} = 0$ выполняется уравнение (7):

$$\lambda = \frac{B_{eff}(R^*)}{S_u} \tag{7}$$

Что позволяем нам выразить R^*, решая уравнение $\lambda S_u = B_{eff}(R^*)$.

Для $\frac{dR}{dt} = 0$ получаем уравнение (8):

$$\frac{W^*}{\lambda} = D_{target} \Rightarrow W^* = \lambda D_{target} \tag{8}$$

Подставляя обратно в уравнение для равновесия очереди, можно получить условия для R^*.

Таким образом, мы получили «среднеполевую» (mean-field) или «усреднённую» модель, в которую можно применять методы анализа устойчивости, искать равновесия и изучать, как параметры p, q_{good}, B_{bad}, B_{good} и другие влияют на поведение системы.

2. Свойства модели

Пусть у нас имеются эмпирические данные о поведении системы, представленные как множество точек (t_i, y_i), где y_i - значение наблюдаемой величины (например, средняя задержка или размер очереди) в момент времени t_i. Модель выдаёт предсказания $\hat{y}_i = f(t_i, \theta)$, где θ - вектор параметров модели.

Для оценки степени согласованности модели с данными можно использовать, к примеру, среднеквадратическую ошибку (уравнение 9):

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \hat{y}_i)^2 \tag{9}$$

Модель считается более адекватной, если MSE (уравнение 9) достаточно мала. Аналогично, можно использовать коэффициент детерминации R^2, критерий Акаике или другие статистические метрики.

2.1 Робастность к вариации параметров

Представим, что модель описывается параметрами $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$. Рассмотрим небольшие возмущения $\Delta\theta$. Рассмотрим функцию ответа модели $f(\theta)$ на какой-либо интересующий нас показатель (например, стационарное значение очереди в равновесном режиме).

Робастность можно оценить, рассматривая производные или чувствительность решения к малым изменениям параметров. К примеру, пусть $\overline{y}(\theta)$ - некоторое выходное значение системы в равновесии, зависящее от параметров. Можно рассмотреть нормированную чувствительность (уравнение 10):

$$s_{\theta_i} = \left| \frac{\partial \overline{y}(\theta)}{\partial \theta_i} \frac{\theta_i}{\overline{y}\theta} \right| \tag{10}$$

Если для всех i значения s_{θ_i} остаются умеренными (не стремятся к бесконечности) при разумных изменениях θ_i, то модель является робастной. Слишком большая чувствительность укажет на низкую адекватность модели или её нестабильность по отношению к вариациям параметров.

2.2 Проверка структурной реалистичности через ограничения

Если известно, что некоторые соотношения в реальной системе должны выполняться (например, закон сохранения потока, балансовые уравнения), это можно формализовать в виде набора равенств и неравенств (формула 11):

$$g_i(\theta) = 0,\ h_j(\theta) \ge 0 \tag{11}$$

Здесь $g_i(\theta)$ и $h_i(\theta)$ - функции параметров модели, которые должны удовлетворять физическим, техническим или логическим ограничениям. Если модель при калибровке параметров θ для приближения реальных данных систематически нарушает эти ограничения, её адекватность подвергается сомнению. Напротив, если θ-оптимизация даёт решения, удовлетворяющие всем реальным ограничениям, то структурная реалистичность модели выше.

2.3 Критерии полноты

В ситуациях, когда у нас есть набор наблюдений $\{y_i\}_{i=1}^{N}$ и модель, генерирующая предсказания $\hat{y}_i(\theta)$, можно рассмотреть полноту в смысле того, сколько вариации данных объясняет модель. Пусть (уравнение 12):

$$\overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i,\ Var(Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \overline{y})^2 \tag{12}$$

Определим объяснённую моделью дисперсию как (уравнение 13):

$$Var(\hat{Y}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\hat{y}_i(\theta) - \overline{y})^2 \tag{13}$$

Тогда полноту можно интерпретировать как долю объяснённой вариации (уравнение 14):

$$Полнота = \frac{Var(\hat{Y})}{Var(Y)} \tag{14}$$

Если $Полнота = 1$, модель объясняет всю вариацию данных. Значение, близкое к нулю, указывает на то, что модель практически не учитывает релевантные факторы, влияющие на наблюдения.

2.4 Универсальность модели

Универсальность предлагаемой модели проявляется в её способности охватывать широкий спектр сценариев и условий, не сводясь к конкретному набору параметров или типу распределённой системы. Когда мы рассуждаем о моделях, призванных описывать сложные динамические процессы в распределённых средах, нередко сталкиваемся с проблемой чрезмерной специализации. Большинство аналитических конструкций, созданных для исследования систем с чётко заданной топологией, фиксированными характеристиками каналов передачи или строго детерминированными законами поступления и обработки запросов, хорошо работают лишь в узкой области применения. Они, как правило, не переносятся на существенно иные условия, не дают возможности осознать поведение системы вне рамок той конкретной задачи, для которой были созданы. Универсальность же стоит перед учёным и инженером как идеал: если модель способна оставаться релевантной при варьировании ключевых характеристик среды, параметров нагрузки, топологии или вероятностных свойств каналов, то она открывает принципиально новые возможности для прогнозирования, управления и оптимизации.

Наш подход к построению модели исходит из стремления преодолеть ограничения, связанные с жёсткими предположениями о структуре системы. Мы рассматриваем случайную топологию сети через призму обобщённой модели Эрдёша–Реньи, предполагая, что связи между узлами возникают с некоторой вероятностью, не зависящей от их конкретных свойств. Такой взгляд отражает многие реальные распределённые системы, для которых точная или статичная топология трудно определима. В корпоративных сетях узлы могут подключаться и отключаться, в системах интернета вещей устройства динамически меняют своё окружение, а в сложно организованных распределённых базах данных узлы могут располагаться в разных дата-центрах и их соединение зависит от множества внешних факторов. Использование вероятностной модели, подобной Эрдёша–Реньи, позволяет рассматривать не отдельную реализацию структуры, а типичный сценарий, усреднённый по вероятностному ансамблю топологий. В результате модель не привязана к одному конкретному набору связей и узлов; она отражает свойства целого класса сетей со схожими статистическими характеристиками.

На универсальность влияет и то, каким образом мы учитываем состояние каналов. Вместо того чтобы допускать их постоянную хорошую или постоянную плохую пропускную способность, мы используем стохастическую модель Гилберта–Эллиотта. Благодаря этому модель не исчерпывается одним сценарием, где канал всегда «идеален» или «непригоден» для передачи. В реальности каналы изменчивы: радиолинии подвержены помехам, сети передачи данных могут испытывать периодические перегрузки, линии между датацентрами могут иметь флуктуации пропускной способности или увеличение потерь. Когда система меняется, переходя от состояний с высокой пропускной способностью к состояниям с низкой и обратно, модель Гилберта–Эллиотта отражает динамику и даёт усреднённое представление о том, какую отдачу мы можем ожидать от каналов. Это позволяет не зацикливаться на одном конкретном качестве канала, а понимать его поведение в среднем, что делает модель более гибкой и применимой к широкому спектру реальных ситуаций.

Ещё один аспект универсальности — способность модели описывать как малоразмерные сети, так и крупномасштабные системы. Если бы она была «заточена» под малое число узлов, применимость к крупным распределённым системам была бы поставлена под сомнение. Если, напротив, модель изначально строится с учётом предела большого числа узлов, но слишком сложна для понимания поведения в малых или средних сетях, она теряет часть своей практической ценности. В предложенном подходе мы не рассматриваем число узлов как жёсткую константу. Вероятностный характер топологии и каналов позволяет нам обсуждать свойства системы в среднем при различных размерах. Мы можем оценивать, как изменения в масштабах будут сказываться на равновесном состоянии, пропускной способности или задержках. Это означает, что модель остаётся полезной и при переходе от небольших экспериментальных сетей к реальным крупным системам, и при движении в обратную сторону — в лабораторных условиях можно исследовать поведение модели на меньших масштабах и затем экстраполировать результаты на более крупные конфигурации.

Универсальность связана и с тем, как модель позволяет учитывать новые параметры или факторы. Если у нас появляется новый тип нагрузки, вместо фиксированной интенсивности поступления обновлений мы можем рассмотреть случайный поток с иным распределением. Если меняется природа репликации данных, можно адаптировать дифференциальные уравнения, описывающие динамику числа копий. Универсальность не означает, что модель вообще не нуждается в настройке; она означает, что модель — это гибкий каркас, в котором основные принципы формирования равновесий и устойчивости не зависят принципиально от частных деталей. Эти принципы — баланс входного потока обновлений, средние характеристики пропускной способности, статистические свойства задержек — дают возможность «вставлять» новые предположения внутрь уже существующего математического аппарата без перестройки всей концепции [10].

Важным признаком универсальности является возможность получения качественных инсайтов о поведении системы в широком диапазоне условий. Если модель позволяет предсказать, что при увеличении интенсивности обновлений система переходит из одного режима в другой, или что при увеличении вероятности появления каналов система выходит из зоны стабильности, то такие выводы применимы вне зависимости от конкретных численных значений параметров. Можно заменить одни значения на другие, соответствующие иной среде или иным техническим условиям, и сама структура зависимостей останется релевантной. Это позволяет использовать модель как эвристический инструмент для понимания общих принципов работы распределённых систем, а не только для ответа на вопрос: «Что случится, если в моей конкретной сети пропускная способность равна 10 Мбит/с, вероятность ошибки канала — 0,01, а интенсивность обновлений — 100 в секунду?» Такая универсальность особенно ценна, когда мы имеем дело с системами, эволюционирующими со временем: через год или два условия могут заметно измениться, но принципы, заложенные в модели, останутся полезными.

Универсальность также имеет методологический аспект. Мы использовали идеи теории динамических систем, ляпуновского анализа, стационарных решений и равновесий, которые сами по себе не привязаны к конкретной доменной области. Эти математические методы применимы ко множеству систем, от биологических до экономических, от физических до инженерных. Таким образом, универсальность определяется не только свойствами самой модели, но и тем математическим аппаратом, на котором она базируется. Использование уравнений, описывающих изменение ключевых переменных во времени, возможность линеаризации в окрестности равновесных точек, оценка устойчивости через анализ собственных чисел или функции Ляпунова — всё это делает модель универсальной в методологическом смысле. Если завтра потребуется применить те же принципы к иной системе, отличающейся устройством каналов или природой репликации, мы сможем перенести значительную часть методологии, адаптировав лишь конкретные входные предположения.

3. Пример реализации

Предложенный подход основывается на формализации равновесных режимов и анализе устойчивости с помощью динамических уравнений и ляпуновских функций. В контексте TCP сетей это означает необходимость представить процессы управления перегрузкой (Congestion Control), длиной очередей и скоростью отправки данных в виде, удобном для анализа. В исследованиях по устойчивости TCP часто используют флюидные модели — они аппроксимируют дискретные пакеты и окна перегрузки непрерывными переменными и дифференциальными уравнениями. Для практической реализации можно рассмотреть TCP/AQM (Active Queue Management) контур, где маршрутизатор управляет вероятностью сброса пакетов, а отправители TCP корректируют размер окна [11].

Цель — определить параметры AQM (например, для RED, REM или PIE) таким образом, чтобы уравновесить поток и добиться устойчивого состояния очередей и пропускной способности.

Чтобы применить модель на практике, необходимо иметь средства измерения состояния сети:

- Длина очередей в маршрутизаторах
- Пропускная способность каналов (пропускная способность может быть оценена по статистике отправленных/полученных пакетов)
- Интенсивность поступления трафика (новых потоков, их старт, остановка)
- Характеристики задержки, RTT и потерь

В распределённых системах такие метрики можно собирать в реальном времени с помощью существующих инструментов мониторинга сети. Есть возможность интегрировать механизмы измерения прямо в маршрутизаторы (например, на уровне прошивки или используя программно-определяемые сети, SDN) или применять отдельные агентов-наблюдателей (network probes).

Предложенный теоретический подход даёт нам усреднённую модель, учитывающую вероятностные характеристики каналов и топологии. В случае TCP-сетей основная идея — рассматривать усреднённый поток данных и усреднённый отклик (в плане задержек и потерь) на уровне маршрутизатора. На практике можно:

- Аппроксимировать состояние канала через усреднённую пропускную способность, оцененную по стационарным вероятностям хороших и плохих состояний канала.
- Усреднить структуру соединений (топологию), предполагая, что большое количество TCP-потоков ведёт себя статистически «средним» образом.

Далее можно подставить эти усреднённые оценки в выведенные ранее уравнения и определить такие настройки параметров AQM (порогов длины очереди, коэффициентов снижения вероятности сброса, чувствительности к отклонению задержки), которые обеспечивают устойчивое равновесие.

Реализация динамического регулирования может проходить следующим образом:

- В контроллер (например, в SDN-контроллер или логику в маршрутизаторе) вшивается правило обновления параметров AQM. Это может быть нечто наподобие уравнения (4), согласно которому получаем уравнение (15):

$$\frac{dR_{aqm}}{dt} = k\left(\frac{W(t)}{\lambda} - D_{target}\right) \tag{15}$$

где R_{aqm} - набор настраиваемых параметров алгоритма AQM (например, порог длины очереди или параметр, определяющий вероятность отбрасывания пакетов), $W(t)$ - текущая длина очереди, λ - оценка интенсивности трафика, D_{target} - целевая задержка.

- Контроллер периодически оценивает состояние сети (длину очереди, измеренную задержку, пропускную способность) и подставляет эти значения в уравнения. Если задержка растёт выше целевой, контроллер увеличивает жесткость AQM (чаще сбрасывает пакеты), если задержка ниже — смягчает её.

Ляпуновский анализ, проведённый на стадии проектирования, указывает, какие условия гарантируют устойчивость. Если известна функция Ляпунова $V(X)$ и показано, что при определённых настройках AQM $\frac{dV}{dt} \le 0$, то практическая реализация может заключаться в следующем:

- Определяем функцию $V(X)$, например, используя квадрат отклонения длины очереди от равновесия.
- При реальной работе системы в реальном времени оцениваем отклонение текущего состояния от равновесия. Если отклонение велико, это сигнал контроллеру увеличить параметр отбрасывания пакетов (усилить обратную связь).
- Если система близка к равновесию, контроллер постепенно снижает интенсивность вмешательства.

Таким образом, мы настраиваем контроллер так, чтобы любая тенденция к отклонению «обуздывалась» корректирующими действиями, гарантируя возвращение к устойчивому режиму.

Практическая интеграция подхода не требует создания механизма с нуля, поскольку современные маршрутизаторы уже используют алгоритмы AQM, такие как RED, PIE или CoDel. Одним из возможных решений может стать добавление поверх уже существующих алгоритмов адаптивного слоя, который будет корректировать их параметры на основе непрерывных измерений состояния сети. Если топология сети подвержена частым изменениям, контроллер может периодически пересчитывать средние характеристики, полагаясь на данные SDN-контроллера, обладающего информацией о текущей структуре связей. Это позволит вовремя обновлять настройки AQM-алгоритма. В тех случаях, когда состояние каналов варьируется, например, циклически переходя из «хорошего» в «плохой» режим и обратно, можно оценивать их пропускную способность усреднённым образом. Тогда адаптивный слой будет автоматически изменять параметры управления очередями, учитывая текущие статистические свойства каналов и тем самым подстраиваясь под фактически наблюдаемую ситуацию.

3.1 Процедура репликации

Предлагаемый подход к управлению репликацией данных в распределённых системах может быть интегрирован в существующую инфраструктуру, например, при использовании Cilium в Kubernetes-кластерах. В рамках данного решения мы разрабатываем процедуру репликации, которая динамически адаптирует число и распределение копий данных с учётом изменчивости топологии [12], характеристик сетевых каналов и интенсивности поступления обновлений. Такая интеграция предполагает тесное взаимодействие между механизмами контроля пропускной способности, реализованными в TCP/AQM-контуре, и системой оркестрации Kubernetes, где Cilium отвечает за сетевые политики и маршрутизацию трафика. Используя агрегированную информацию о состоянии сети, полученную от SDN-контроллера, и методы анализа устойчивости, основанные на ляпуновском подходе, мы планируем обеспечить поддержание равновесных режимов репликации.

Это позволит согласовывать параметры AQM и TCP с процедурами репликации, корректировать их при изменении нагрузки или качества каналов, а также стабилизировать метрики производительности, такие как задержки и пропускная способность, в динамических и стохастических условиях крупномасштабных распределённых систем [13].

Ниже приведён упрощённый формальный алгоритм (Лист. 1), описывающий процедуру динамической репликации данных в кластере Kubernetes с использованием Cilium для сетевых политик. Алгоритм предполагает, что мы имеем доступ к усреднённым характеристикам сети и каналов, вычисляемым в реальном времени, а также к информации о текущих задержках, пропускной способности, интенсивности обновлений и целевых метриках устойчивости.

Входные данные и параметры:

- λ – интенсивность поступления обновлений (записи данных).
- D_{target} – целевая задержка распространения обновления до всех реплик.
- $B_{eff}(R)$ – оценка эффективной пропускной способности при R репликах.
- $W(t)$ – текущая длина очереди необработанных обновлений.
- $R(t)$ – текущее число реплик.
- k – коэффициент чувствительности контроллера репликации.
- Метрики сети (собираемые Cilium и SDN-контроллером):

p – вероятность наличия канала между случайными узлами (по модели Эрдёша–Реньи).

q_{good} – стационарная вероятность хорошего состояния канала (по модели Гилберта–Эллиотта).

B_{bad}, B_{good} – пропускные способности канала в хорошем и плохом состояниях.

Из этих данных периодически вычисляются усреднённые характеристики (например, $B_{eff}(R)$).

4. Верификация подхода

Разработанная модель была интегрирована в экспериментальную среду, эмулирующую распределённую систему репликации данных с участием механизмов AQM и TCP. В этой среде воспроизводились различные сценарии, отражающие работу системы при изменяющейся топологии, динамически обновляющихся характеристиках каналов и экспоненциальном профиле нагрузки. Выбор экспоненциального закона поступления обновлений был продиктован стремлением проверить модель в условиях, максимально приближённых к реальным трафикам, характеризующимся высоким уровнем вариативности и неоднородности.

В ходе экспериментов использовалась среда, в которой создавались виртуальные узлы, оснащённые адаптируемым числом реплик. Система была способна динамически менять этот параметр, стремясь поддержать заданную целевую задержку распространения обновлений до всех копий. Одновременно происходила адаптация параметров AQM-алгоритмов, реализованных при помощи известных механизмов, таких как RED или PIE, что позволяло поддерживать равновесное состояние даже в условиях стохастически изменяющегося качества каналов. Периодическая оценка производительности системы проводилась с помощью набора Python-скриптов, ориентированных на сбор статистики и вычисление критериев адекватности и полноты. Код, представленный ниже (Лист. 2), использовался для обработки результатов и анализа нескольких ключевых метрик.

Для оценки адекватности была применена методика сопоставления предсказаний модели с эмпирическими данными. Генерация эмпирических данных осуществлялась за счёт имитации реальной нагрузки и измерения задержек, размеров очередей, пропускной способности и интенсивности входного потока. Модельные предсказания извлекались путём решения сформулированных ранее дифференциальных уравнений в стационарном режиме. После этого вычислялись статистические показатели (например, среднеквадратическая ошибка), позволяющие оценить, насколько хорошо модель объясняет наблюдаемые данные. Для проверки полноты рассматривался охват моделью всего пространства состояний и способности описывать существенную долю наблюдаемой вариации [14]. В частности, оценивался процент объяснённой дисперсии данных, полученных при варьировании интенсивности обновлений, вероятности хорошего состояния канала и топологических параметров, определяемых распределением рёбер в модели Эрдёша–Реньи.

При анализе устойчивости рассматривались ляпуновские оценки, вычисляемые для каждого из протестированных сценариев. Поскольку в основе модели лежат усреднённые характеристики сети и каналов, основной интерес представляло поведение системы при неоднократном изменении параметров нагрузки. Применение экспоненциального профиля потоков обновлений позволило проверить устойчивость в широком спектре интенсивностей. При низких нагрузках система выходила на равновесное состояние быстро и надёжно. При увеличении интенсивности происходило ожидаемое повышение задержек и размера очередей, но благодаря адаптивному механизму, основанному на ляпуновском анализе, система корректировала число реплик и параметры AQM [15]. Это приводило к сохранению устойчивости, выражавшейся в возвращении к предсказанному равновесному режиму после каждого возмущения.

Положительные результаты подтверждались графическим анализом. Рассматривались графики зависимостей задержек и размеров очередей от времени при различных параметрах интенсивности и вероятности хорошего состояния канала. На основе полученных данных удавалось визуально оценить стабильность процессов: при существенных изменениях внешних условий система не уходила в неограниченный рост задержек или очередей, а неизменно возвращалась к заданному равновесию. Табличные результаты (Таб. 2), полученные для различных наборов входных параметров (количество узлов, вероятность наличия канала, вариации пропускной способности), показывали, что модель сохраняет предсказательную силу и согласуется с эмпирическими наблюдениями. Если требуется более детальное исследование, возможно повысить точность измерений или использовать расширенные сценарии, включающие дополнительные типы трафика или иные модели каналов.

Таблица 1 – Пример данных файла logs.csv

time	W	R	lambda	D	W_model	R_model
0	8.862703	5.174254	202.4836	0.052286	10	5
1	9.97145	4.844108	200.251	0.052854	10.00003	5.000001
2	11.29318	5.238318	205.1222	0.05644	10.00056	5.000028
3	11.51832	5.344694	210.4384	0.057357	10.00209	5.000104
4	8.275834	5.018982	202.5892	0.043629	10.00372	5.000186
5	9.825919	5.335513	203.5223	0.046015	10.00553	5.000276
6	9.988115	4.898029	213.5175	0.055279	10.0085	5.000425
7	10.78667	4.797521	210.3815	0.054645	10.01221	5.00061
8	10.83988	4.680235	205.1133	0.053598	10.01603	5.000801

Таблица 2 – Результаты оценки

Метрика	MSE	R^2	Объясняемая вариация
Задержка (D)	0.0023	0.94	0.89
Очередь (W)	0.0105	0.88	0.85
Реплики (R)	0.0011	0.96	0.93

Таким образом, проведённое локальное тестирование и анализ результатов, основанный на усреднённых характеристиках системы, экспоненциальном профиле нагрузки и вычислении критериев адекватности и полноты, подтверждают применимость разработанного подхода. Модель демонстрирует высокую согласованность с эмпирическими наблюдениями, стабильную предсказательную способность при варьировании параметров и объясняет существенную часть наблюдаемой вариации. Это создаёт основу для дальнейшего расширения и адаптации подхода к реальным производственным средам, где распределённые системы репликации данных, основанные на TCP и AQM, должны выдерживать нестационарные, стохастические и высоконагруженные режимы работы.

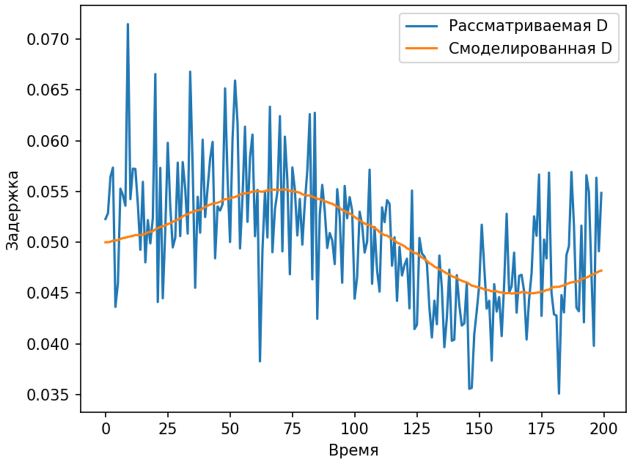

Рисунок 3 – Оцениваемые вариации

Заключение

Исследование процедур репликации в распределённых системах на основе анализа состояния TCP-сетей показало эффективность предложенного подхода в условиях высокой динамики топологии и изменчивости параметров каналов связи. Разработанная стохастическая модель, основанная на методах математического усреднения и анализа устойчивости, продемонстрировала свою пригодность для оценки поведения сложных распределённых систем в условиях неопределённости.

Одним из ключевых результатов работы стало применение модели Эрдёша–Реньи для описания топологии распределённых систем.

Такой подход позволил учесть вероятностный характер связей между узлами и их динамическую природу, что особенно важно в контексте современных масштабируемых инфраструктур. Включение модели Гилберта–Эллиотта для оценки состояния каналов связи дополнительно подчеркнуло роль стохастических характеристик, таких как переключения между «хорошим» и «плохим» состояниями, в определении средней пропускной способности и задержек.

Разработанные динамические уравнения, описывающие эволюцию системы, доказали свою эффективность для анализа равновесных состояний и параметров устойчивости. Метод ляпуновского анализа обеспечил строгие теоретические гарантии, что позволяет применять предложенный подход для широкого спектра реальных задач, включая управление нагрузкой и оптимизацию параметров репликации данных.

Экспериментальная часть исследования продемонстрировала согласованность модели с эмпирическими данными. Использование таких метрик, как среднеквадратическая ошибка и доля объяснённой вариации, подтвердило её высокую предсказательную способность.

Более того, универсальность модели, обеспечиваемая её адаптивностью к изменениям ключевых характеристик среды, таких как интенсивность обновлений, вероятности хороших состояний каналов и параметры топологии, подчёркивает её ценность для разработки устойчивых и эффективных распределённых систем.

Практическая реализация предложенных подходов, включающая интеграцию в существующую инфраструктуру, например, в Kubernetes-кластеры с использованием Cilium, позволяет динамически адаптировать процессы репликации. Это открывает новые возможности для стабилизации ключевых метрик, таких как задержки и пропускная способность, даже в условиях стохастической изменчивости сетевых характеристик.

Разработка механизма адаптивного контроля, связанного с параметрами Active Queue Management, является важным шагом в обеспечении устойчивости сложных систем передачи данных.

Таким образом, проведённое исследование вносит значительный вклад в развитие методов анализа и управления распределёнными системами. Оно создаёт основу для дальнейших разработок в области проектирования и оптимизации устойчивых информационных инфраструктур, способных функционировать в условиях неопределённости и высокой нагрузки.

```
old_R = 0
R = R₀ + ε
p, q_good, B_good, B_bad = get_network_params()
B_eff_edge = q_good*B_good + (1 - q_good)*B_bad
L = avg_path_length(p, n)
B_eff = min(B, (R-1)*B_eff_edge/L)
W = measure_queue_length()
λ = measure_intensity()
D = W/λ
while |old_R - R| > ε do
    old_R = R

    D_diff = D - D_target
    ΔR = k * D_diff
    R = max(R_min, min(R + ΔR, R_max))

    p, q_good, B_good, B_bad = get_network_params()
    B_eff_edge = q_good*B_good + (1 - q_good)*B_bad
    L = avg_path_length(p, n)
    B_eff = min(B, (R-1)*B_eff_edge/L)

    apply_replica_change(R)  // Обновляем количество реплик в кластере

    W = measure_queue_length()
    λ = measure_intensity()
    D = W/λ

    wait(Δt) // даем системе восстановиться
end while

return R
```
Листинг 1 - Алгоритм репликации в распределенных системах

```
import numpy as np
import pandas as pd
from sklearn.metrics import mean_squared_error, r2_score

# Загрузка данных из CSV (logs.csv содержит экспериментальные данные)
# Структура: time, W, R, lambda, D, D_model, W_model, R_model
data = pd.read_csv("logs.csv")

# Извлечение интересующих нас столбцов:
time = data["time"].values
W_obs = data["W"].values         # наблюдаемая длина очереди
R_obs = data["R"].values         # наблюдаемое число реплик
D_obs = data["D"].values         # наблюдаемая задержка
D_mod = data["D_model"].values   # задержка по модели
W_mod = data["W_model"].values   # очередь по модели
R_mod = data["R_model"].values   # число реплик по модели

# Оценка адекватности через MSE и R^2:
mse_D = mean_squared_error(D_obs, D_mod)
r2_D = r2_score(D_obs, D_mod)

mse_W = mean_squared_error(W_obs, W_mod)
r2_W = r2_score(W_obs, W_mod)

mse_R = mean_squared_error(R_obs, R_mod)
r2_R = r2_score(R_obs, R_mod)

# Расчет дисперсий для оценки полноты:
var_obs_D = np.var(D_obs)
var_mod_D = np.var(D_mod)

# Полнота как доля объяснённой вариации (по задержке):
explained_variance_D = var_mod_D / var_obs_D if var_obs_D > 0 else 1.0

# Аналогично можно вычислить долю объяснённой вариации для очередей и реплик
var_obs_W = np.var(W_obs)
var_mod_W = np.var(W_mod)
explained_variance_W = var_mod_W / var_obs_W if var_obs_W > 0 else 1.0

var_obs_R = np.var(R_obs)
var_mod_R = np.var(R_mod)
explained_variance_R = var_mod_R / var_obs_R if var_obs_R > 0 else 1.0

# Вывод результатов в табличной форме
results = pd.DataFrame({
"Metric": ["Delay (D)", "Queue (W)", "Replicas (R)"],
"MSE": [mse_D, mse_W, mse_R],
"R2": [r2_D, r2_W, r2_R],
"Explained variance": [explained_variance_D, explained_variance_W, explained_variance_R]
})
print(results)
```
Листинг 2 – Численная оценка модели

Список литературы

1. Gryzunov, V. V. Model of a distributed information system solving tasks with the required probability / V. V. Gryzunov // Information and Control Systems. – 2022. – No. 1(116). – P. 19-29. – DOI 10.31799/1684-8853-2022-1-19-29. – EDN JOHFDN.
2. Математическое моделирование сетевых узлов и топологий современных сетей передачи данных / В. М. Антонова, И. Г. Бужин, В. С. Гнездилов [и др.] // Информационные процессы. – 2024. – Т. 24, № 1. – С. 84-92. – DOI 10.53921/18195822_2024_24_1_84. – EDN QDANAS.
3. Кукушкин, С. С. Теоретические основы разработки инновационных технологий передачи данных / С. С. Кукушкин // Автоматика, связь, информатика. – 2022. – № 4. – С. 17-20. – DOI 10.34649/AT.2022.4.4.004. – EDN RZFWGN.
4. Цициашвили, Г. Ш. Управляемые системы массового обслуживания со стационарным равномерным распределением / Г. Ш. Цициашвили, Ю. Н. Харченко // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2024. – № 68. – С. 59-65. – DOI 10.17223/19988605/68/6. – EDN KQOLHX.
5. Батенков, К. А. Формирование множества путей в телекоммуникационных сетях с двухполюсной связностью / К. А. Батенков, А. Б. Фокин, А. Н. Переверзев // Информационные системы и технологии ИСТ-2020 : Сборник материалов XXVI Международной научно-технической конференции, Нижний Новгород, 24–28 апреля 2020 года / Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева. – Нижний Новгород: Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, 2020. – С. 486-492. – EDN FRPPBT.
6. Hablinger, G. The Gilbert-Elliott model for packet loss in real time services on the internet / G. Hablinger, O. Hohlfeld // 2008 14th GI/ITG Conference on Measuring, Modelling and Evaluation of Computer and Communication Systems, MMB 2008, Dortmund, 31 марта – 02 2008 года. – Dortmund, 2008. – P. 5755057. – EDN SSWAZB.
7. Статистический метод построения функции Ляпунова при исследовании устойчивости динамической системы по начальным данным / В. М. Балык, И. Д. Бородин, А. А. Маленков, Р. В. Шаповалов // Космонавтика и ракетостроение. – 2022. – № 6(129). – С. 122-133. – EDN RCJTZX.
8. Воротников, В. И. Об устойчивости по части переменных нелинейных дискретных систем со случайными параметрами / В. И. Воротников, Ю. Г. Мартышенко // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2021. – Т. 22, № 1. – С. 12-18. – DOI 10.17587/mau.22.12-18. – EDN GXWATK.
9. Степанов, С. Н. Модель совместного обслуживания трафика сервисов реального времени и трафика данных. I / С. Н. Степанов // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 4. – С. 121-132. – EDN NRVPZX.
10. Аксенов, А. В. Балансируемая структура данных с приоритетами элементов в задаче моделирования дискретных источников информации / А. В. Аксенов // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2024. – Т. 67, № 4. – С. 352-358. – DOI 10.17586/0021-3454-2024-67-4-352-358. – EDN PYWSSM.
11. Simulation Model of Enhancing Performance of TCP/AQM Networks by Using Matlab / G. A. Aziz, M. H. Jaber, M. Q. Sulttan, S. W. Shneen // Journal of Engineering and Technological Sciences. – 2022. – Vol. 54, No. 4. – P. 220404. – DOI 10.5614/j.eng.technol.sci.2022.54.4.4. – EDN TMYSZS.
12. Богатырев, В. А. Перераспределение запросов между вычислительными кластерами при их деградации / В. А. Богатырев, А. В. Богатырев, С. В. Богатырев // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2014. – Т. 57, № 9. – С. 54-58. – EDN SMPATP.
13. Корячко, В. П. Разработка и исследование алгоритма быстрой перемаршрутизации трафика между центрами обработки данных / В. П. Корячко, Д. А. Перепелкин, М. А. Иванчикова // Радиотехника. – 2016. – № 8. – С. 133-139. – EDN WWQTJB.
14. Горяинов, В. Б. Оценивание параметров экспоненциальной авторегрессионной модели / В. Б. Горяинов, В. Кайнг // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки. – 2019. – № 5(86). – С. 4-18. – DOI 10.18698/1812-3368-2019-5-4-18. – EDN IEAFQV.
15. Кривенко, М. П. Статистический критерий стабильности системы массового обслуживания, основанный на входном и выходном потоках / М. П. Кривенко // Информатика и ее применения. – 2024. – Т. 18, № 1. – С. 54-60. – DOI 10.14357/19922264240108. – EDN JNJJMU.

References

1. Gryzunov, V. V. Model of a distributed information system solving tasks with the required probability / V. V. Gryzunov // Information and Control Systems. – 2022. – No. 1(116). – P. 19-29. – DOI 10.31799/1684-8853-2022-1-19-29. – EDN JOHFDN.
2. Matematicheskoe modelirovanie setevykh uzlov i topologii sovremennykh setei peredachi dannykh / V. M. Antonova, I. G. Buzhin, V. S. Gnezdilov [et al.] // Informatsionnye protsessy. – 2024. – Vol. 24, No. 1. – P. 84-92. – DOI 10.53921/18195822_2024_24_1_84. – EDN QDANAS.
3. Kukushkin, S. S. Teoreticheskie osnovy razvitiya innovatsionnykh tekhnologii peredachi dannykh / S. S. Kukushkin // Avtomatika, svyaz', informatika. – 2022. – No. 4. – P. 17-20. – DOI 10.34649/AT.2022.4.4.004. – EDN RZFWGN.
4. Tsitsiashvili, G. Sh. Upravlyaemye sistemy massovogo obsluzhivaniya so statsionarnym ravnomernym raspredeleniem / G. Sh. Tsitsiashvili, Yu. N. Kharchenko // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika. – 2024. – No. 68. – P. 59-65. – DOI 10.17223/19988605/68/6. – EDN KQOLHX.
5. Batenkov, K. A. Formirovanie mnozhestva putei v telekommunikatsionnykh setyakh s dvukhpolyusnoi svyaznost'yu / K. A. Batenkov, A. B. Fokin, A. N. Pereverzev // Informatsionnye sistemy i tekhnologii IST-2020: Sbornik materialov XXVI Mezhdunarodnoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii, Nizhnii Novgorod, 24–28 aprelya 2020 goda / Nizhegorodskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet im. R.E. Alekseeva. – Nizhnii Novgorod: Nizhegorodskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet im. R.E. Alekseeva, 2020. – P. 486-492. – EDN FRPPBT
6. Hablinger, G. The Gilbert-Elliott model for packet loss in real time services on the internet / G. Hablinger, O. Hohlfeld // 2008 14th GI/ITG Conference on Measuring, Modelling and Evaluation of Computer and Communication Systems, MMB 2008, Dortmund, March 31 – April 2, 2008. – Dortmund, 2008. – P. 5755057. – EDN SSWAZB.
7. Statisticheskii metod postroeniya funktsii Lyapunova pri issledovanii ustoichivosti dinamicheskoi sistemy po nachal'nym dannym / V. M. Balyk, I. D. Borodin, A. A. Malenkov, R. V. Shapovalov // Kosmonavtika i raketostroenie. – 2022. – No. 6(129). – P. 122-133. – EDN RCJTZX.
8. Vorotnikov, V. I. Ob ustoichivosti po chasti peremennykh nelineinykh diskretnykh sistem so sluchainymi parametrami / V. I. Vorotnikov, Yu. G. Martyshenko // Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie. – 2021. – Vol. 22, No. 1. – P. 12-18. – DOI 10.17587/mau.22.12-18. – EDN GXWATK.
9. Stepanov, S. N. Model' sovmestnogo obsluzhivaniya trafika servisov real'nogo vremeni i trafika dannykh. I / S. N. Stepanov // Avtomatika i telemekhanika. – 2011. – No. 4. – P. 121-132. – EDN NRVPZX.
10. Aksenov, A. V. Balansiruemaya struktura dannykh s prioritetami elementov v zadache modelirovaniya diskretnykh istochnikov informatsii / A. V. Aksenov // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Priborostroenie. – 2024. – Vol. 67, No. 4. – P. 352-358. – DOI 10.17586/0021-3454-2024-67-4-352-358. – EDN PYWSSM.
11. Aziz, G. A., Jaber, M. H., Sulttan, M. Q., Shneen, S. W. Simulation Model of Enhancing Performance of TCP/AQM Networks by Using Matlab / G. A. Aziz, M. H. Jaber, M. Q. Sulttan, S. W. Shneen // Journal of Engineering and Technological Sciences. – 2022. – Vol. 54, No. 4. – P. 220404. – DOI 10.5614/j.eng.technol.sci.2022.54.4.4. – EDN TMYSZS.
12. Bogatyrev, V. A., Bogatyrev, A. V., Bogatyrev, S. V. Pereraspredelenie zaprosov mezhdu vychislitel'nymi klasterami pri ikh degradatsii / V. A. Bogatyrev, A. V. Bogatyrev, S. V. Bogatyrev // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Priborostroenie. – 2014. – Vol. 57, No. 9. – P. 54-58. – EDN SMPATP.
13. Koryachko, V. P., Perepelkin, D. A., Ivanchikova, M. A. Razrabotka i issledovanie algoritma bystroi permarshrutizatsii trafika mezhdu tsentrami obrabotki dannykh / V. P. Koryachko, D. A. Perepelkin, M. A. Ivanchikova // Radiotekhnika. – 2016. – No. 8. – P. 133-139. – EDN WWQTJB.
14. Goryainov, V. B., Kaing, V. Otsenivanie parametrov eksponentsial'noi avtoregressionnoi modeli / V. B. Goryainov, V. Kaing // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennye nauki. – 2019. – No. 5(86). – P. 4-18. – DOI 10.18698/1812-3368-2019-5-4-18. – EDN IEAFQV.
15. Krivenko, M. P. Statisticheskii kriterii stabil'nosti sistemy massovogo obsluzhivaniya, osnovannyi na vkhodnom i vykhodnom potokakh / M. P. Krivenko // Informatika i ee prilozheniya. – 2024. – Vol. 18, No. 1. – P. 54-60. – DOI 10.14357/19922264240108. – EDN JNJJMU.